Wissen und Können	Aufgaben, Beispiele und Erläuterungen

Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bezeichnungen:

P(A): Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A

P(A und B) = P(A∩B)
Wahrscheinlichkeit, dass sowohl A als auch B eintritt

$P_A(B)$: Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, wenn A bereits eingetreten ist (→bedingte Wahrscheinlichkeit).

Merke: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Bei der bedingten Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$ sind die möglichen Ergebnisse nur noch die Ergebnisse von A. Die günstigen Ergebnisse sind die Ergebnisse von A, bei denen zusätzlich B eintritt.

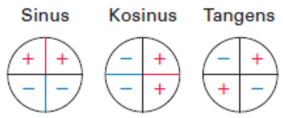
Aufgabe 1: Von einer Schweinepopulation sind 4 % der Schweine an einem Virus erkrankt (K). Ein Schnelltest erkennt 95 % dieser kranken Schweine als solche. Irrtümlich stuft er jedoch 15 % der gesunden Schweine als krank ein.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein durch Schnelltest für gesund erklärtes Schwein auch wirklich gesund ist.

Trigonometrie – Sinus und Kosinus

2. Sinus-, Kosinus- und Tangenswerte für beliebige Winkel

Sinus-, Kosinus- und Tangenswerte von Winkeln, die größer als 90° sind, lassen sich auf Winkel zwischen 0° und 90° zurückführen:

- Der Quadrant liefert das Vorzeichen:

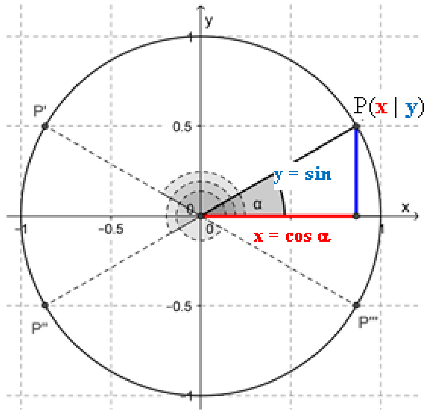


- Die Differenz zwischen dem Winkel und 180° bzw. zwischen 360° und dem Winkel liefert den zugehörigen spitzen Winkel.

Bsp:

sin 120° = +sin (180°– 120°) = sin 60° = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

cos 240° = –cos (240°–180°) = –cos 60° = $-\frac{1}{2}$



Für welche Winkel $\alpha \in [0°; 360°[$ ist sin α = 0,6?

→ Da der Sinuswert 0,6 positiv ist, müssen die Winkel α im I. bzw. II. Quadranten liegen. Der TR liefert das Ergebnis $\alpha \approx 36{,}9°$.

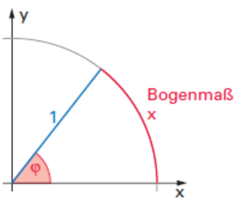
→ Eine weitere Lösung ist also $\alpha \approx 180° - 36{,}9° = 143{,}1°$ (II. Qu.)

Aufgabe 2: Für welche Winkel $\alpha \in [0°; 360°[$ ist cos α = –0,342?

3. Bogenmaß

Das Bogenmaß x eines Winkels α entspricht der Länge des zugehörigen Bogens im Einheitskreis:

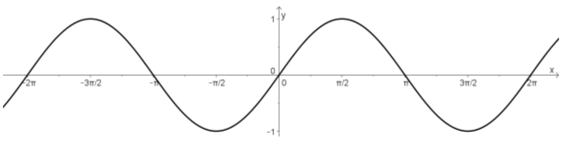
$$x = \frac{\alpha}{180°} \cdot \pi$$



Wichtige Werte:

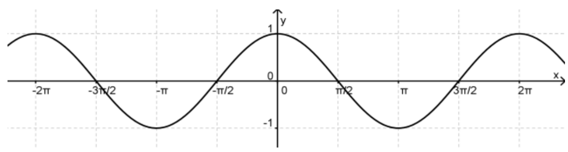
Gradmaß φ	30°	45°	60°	90°	180°
Bogenmaß x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

4. Sinusfunktion f: x ↦ sin x



Periodisch mit der Periode 2π, d.h. sin x = sin (x$\pm 2\pi$)
Definitionsmenge D = ℝ
Wertemenge W = [-1; 1]
Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung: sin (–x) = –sin x

5. Kosinusfunktion f: x ↦ cos x



Periodisch mit der Periode 2π, d.h. cos x = cos (x$\pm 2\pi$)
Definitionsmenge D = ℝ
Wertemenge W = [-1; 1]
Der Graph ist achsensymmetrisch zum Ursprung: cos (–x) = cos x

6. Die allgemeine Sinuskurve

Gegenüber der normalen Sinuskurve y = sin x ist die Sinuskurve von y = a · sin b·(x–c)

- um c in x- Richtung verschoben,

Bsp.: $y = -3\sin 3(x + \frac{\pi}{2})$

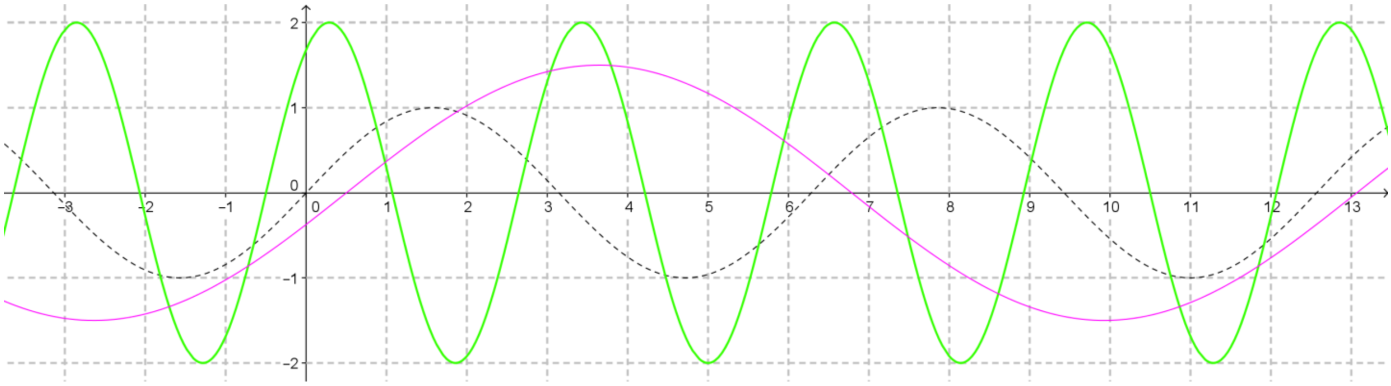
Die Sinuskurve y = sin x ist

- um $\frac{\pi}{2}$ nach links (!) verschoben,

- mit dem Faktor $\frac{1}{b}$ in x- Richtung gestreckt (für $|b|$<1) bzw. gestaucht (für $|b|$>1),
  Die Periodenlänge berechnet man mit $\frac{2\pi}{b}$.
- mit dem Faktor $|a|$ in y-Richtung gestreckt (für $|a|$>1) bzw. gestaucht (für $|a|$ <1). Ist a negativ, so wird der Graph noch an der x-Achse gespiegelt. $|a|$ ist die Amplitude.

- mit dem Faktor $\frac{1}{3}$ in x-Richtung gestaucht (da b = 3)
  Neue Periodenlänge ist $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$
- mit dem Faktor $|a|$ = 3 in y-Richtung gestreckt. Die Amplitude ist also 3, die Wertemenge W = [-3;3]

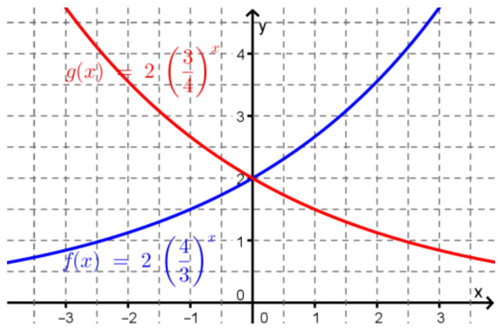
Aufgabe 6 a) Wie geht der Graph der Funktion f mit f(x) = $-0{,}5\,\sin(2x-3)$ aus der Sinuskurve y = sin x hervor?
b) Bestimmen Sie die Funktionsterme der abgebildeten Funktionen h und j.



Exponentialfunktion, Logarithmus und Exponentialgleichungen

7. Die Exponentialfunktion
Funktionen der Form f(x) = b · a^x mit a, b > 0 und a ≠ 1 nennt man Exponentialfunktionen.
- D = ℝ und W =]0;∞[
- Die x-Achse ist waagrechte Asymptote.
- Der Graph verläuft durch P(0/b).
- Beachte:
  a < 1: exponentielle Abnahme (Graph fällt)
  a > 1: exponentielle Zunahme (G_f steigt)
- Spiegelt man den Graphen von f(x) = b · a^x an der y-Achse, so erhält man den Graphen der Funktion g(x) = b · $(\frac{1}{a})^x$

Beispiel:



Die allgemeine Exponentialfunktion f(x) = $b \cdot a^{x-c} + d$ erhält man, indem man den Graphen von $y = a^x$
- um c in x-Richtung verschiebt,
- mit $|b|$ in y-Richtung streckt bzw. staucht und, falls b<0, an der x-Achse spiegelt,
- in y-Richtung verschiebt (y = d ist neue Asymptote)

Beispiel: f(x) = $-1{,}5^{x+1} + 3$ erhält man aus g(x)= $1{,}5^x$ durch Verschieben um 1 nach links, Spiegeln an der x-Achse und anschließendes Verschieben um 3 nach oben.

Aufgabe 7: Skizzieren Sie ausgehend von y = 2^x den Graphen der Funktion y = $-\frac{1}{2} \cdot 2^{x-1} + 3$

8. Der Logarithmus
Der Logarithmus von u zur Basis a ist diejenige Zahl r, mit der man a potenzieren muss, um u zu erhalten: $a^r = u$ → $r = \log_a u$
„Logarithmus“ bedeutet so viel wie „Exponent“.

Für den Zehnerlogarithmus $\log_{10} u$ schreibt man kurz log u oder lg u.

Rechenregeln

$\log_2(4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 5$ (*Produktregel*)

$\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 1 - \log_2 8 = -3$ (*Quotientenregel*)

$\log_2 (\frac{1}{8})^5 = 5 \cdot \log_2 \frac{1}{8} = -15$ (*Potenzregel*)

Beispiele:

$4^3 = 64$ → $\log_4 64 = 3$

$2^x = 16$ → x = $\log_2 16 = 4$

$\log_{10} 10000 = \lg 10000 = 4$

Beachte: $\boxed{\log_a u = \frac{\lg u}{\lg a}}$

9. Exponentialgleichungen

In einer Exponentialgleichung tritt die Unbekannte nur im Exponenten auf.
Löse durch Logarithmieren nach dem Exponenten auf.

Aufgabe 9: Löse die Gleichungen.

a) $2{,}5 \cdot 3^x = 5 \cdot 2^x$

b) $4 \cdot 3^{2x-1} = 5 \cdot 4^{x+2}$

a)
$$\begin{aligned} 2^x &= 3 && \mid \lg\ldots \\ \lg 2^x &= \lg 3 \\ x \cdot \lg 2 &= \lg 3 && \mid : \lg 2 \\ x &= \frac{\lg 3}{\lg 2} \approx 1{,}585 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 21 \cdot 3^{\frac{x}{2}} &= 7 && \mid : 21 \\ 3^{\frac{x}{2}} &= \tfrac{1}{3} && \mid \log_3\ldots \\ \tfrac{x}{2} &= -1 && \mid \cdot 2 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2^{x+1} \cdot 3^x &= 72 && \mid \lg\ldots \\ (x+1) \cdot \lg 2 + x \cdot \lg 3 &= \lg 72 && \mid -\lg 2 \\ x \cdot (\lg 2 + \lg 3) &= \lg 72 - \lg 2 \\ x &= \frac{\lg 72 - \lg 2}{\lg 2 + \lg 3} = \frac{\lg(72:2)}{\lg(2 \cdot 3)} = \frac{\lg 36}{\lg 6} = \frac{2 \cdot \lg 6}{\lg 6} = 2 \end{aligned}$$

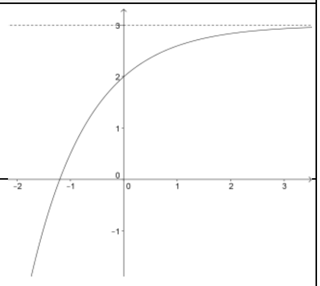
Verhalten von Funktionsgraphen im Unendlichen

10. Konvergenz

Nähern sich die Funktionswerte f(x) für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$ der Zahl a beliebig genau an, so heißt a **Grenzwert** (**Limes**) der Funktion f.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a$$

Bsp.:
Der Graph von $f(x) = -0{,}4^x + 3$ nähert sich für $x \to +\infty$ dem Wert 3 beliebig genau an.
→ $\lim_{x \to +\infty}(-0{,}4^x + 3) = 3$
→ y = 3 ist waagrechte Asymptote.



11. Divergenz

Werden die Funktionswerte f(x) für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$ beliebig groß bzw. klein, so **divergiert die Funktion bestimmt.**

z.B. $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

Die Funktionswerte der abgebildeten Funktion werden für $x \to -\infty$ beliebig klein, d.h. f(x) divergiert bestimmt für $x \to -\infty$.

12. Bestimmung des Verhaltens

a) Ganzrationale Funktionen:
Klammere die höchste Potenz aus!

b) Bruchfunktionen:
Teile Zähler und Nenner durch die höchste Nennerpotenz!

Bsp.:

a)
$$\lim_{x \to +\infty} (\underbrace{x^3}_{\to +\infty} \underbrace{- x^2}_{\to -\infty}) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x^3}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{(1 - \tfrac{1}{x})}_{\to +1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\underbrace{x^3}_{\to +\infty} \underbrace{- 3x^4}_{\to -\infty}) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x^4}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{(\tfrac{1}{x} - 3)}_{\to -3} = -\infty$$

b)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{x^2 - x}^{\to +\infty}}{\underbrace{1 + 2x^2}_{\to +\infty}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{2x^2}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{1 - \frac{1}{x}}^{\to +1}}{\underbrace{\frac{1}{x^2} + 2}_{\to +2}} = \frac{1}{2}$$

Einige wichtige Grenzwerte

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = \infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \lim_{x \to -\infty} a^{-x} = \infty \quad \text{für } a>1$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{x \to +\infty} a^{-x} = 0 \quad \text{für } a>1$$

Aufgabe 12: **Untersuche folgende Funktionen auf Grenzwerte im Unendlichen !**

a) $f(x) = \dfrac{2}{3x-2}$ b) $g(x) = \dfrac{2x-1}{3x-2}$

c) $h(x) = 3x^2 - 2x + 5$ d) $k(x) = x - \dfrac{1}{x}$

e) $l(x) = \dfrac{2}{x} - 5$ f) $m(x) = \dfrac{3x^2+1}{-2x^4-5}$

Ganzrationale Funktionen

13. Definition

Eine Funktion, deren Funktionsterm als Polynom $a_n x^n + a_{n-1} x^{n+1} + \ldots + a_1 x + a_0$ mit $a_n \neq 0$ geschrieben werden kann, nennt man **ganzrationale Funktion n-ten Grades** oder **Polynomfunktion**.

Bsp.:
$f(x) = 2x^5 + 3x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$ ist eine ganzrationale Funktion 5. Grades und hat somit höchstens 5 Nullstellen.

14. Nullstellen

a) Ermittlung mithilfe des **Teilersatzes**:
Besitzt die ganzrationale Funktion $a_n x^n + a_{n-1} x^{n+1} + \ldots + a_1 x + a_0$ mit $a_n \neq 0$ nur *ganzzahlige* Koeffizienten $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$, so ist jede ganzzahlige Nullstelle ein **Teiler von a_0**.

b) Ist b eine **k-fache Nullstelle** der ganzrationalen Funktion f, so gilt:

- Der Linearfaktor (x-b) tritt k-mal auf: $f(x) = (x-b)^k \cdot g(x)$
- k ungerade: der Graph G_f wechselt bei b das Vorzeichen
- k gerade: G_f bleibt auf der gleichen Seite
- Je größer k ist, desto mehr schmiegt sich G_f bei b an die x-Achse an.

Bsp.: Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7x + 2$
Suche NS durch Teilersatz: Teiler von x_0 sind ± 1 und ± 2.
→ Probieren liefert die NS $x_1 = 2$
→ Polynomdivision durch (x-2) und Ermittlung weiterer Nullstellen:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 6x^2 + 7x + 2) : (x-2) = x^2 - 4x - 1 \\
\underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
\quad -4x^2 + 7x \\
\quad \underline{-(-4x^2 + 8x)} \\
\qquad -x + 2 \\
\qquad \underline{-(-x + 2)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$x^2 - 4x - 1 = 0$$
$$x_{2;3} = \frac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

→ faktorisierte Form / Linearfaktorzerlegung:
$f(x) = (x-2)(x-2-\sqrt{5})(x-2+\sqrt{5})$

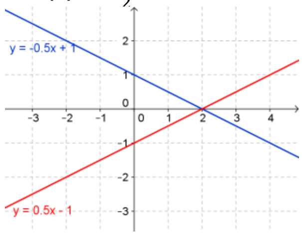
Aufgabe 14:
a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x) = (x - 2)^2 \cdot (x + 3)$ und skizzieren Sie den Graphen.
b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x) = (x - 2)^3 \cdot (x + 2)^2 \cdot (x - 1) \cdot x^5 \cdot (x - 3)$.
c) Berechnen Sie die Nullstellen von $f(x) = -x^4 + 4x^3 + x^2 - 16x + 12$.

Eigenschaften von Funktionen und ihrer Graphen

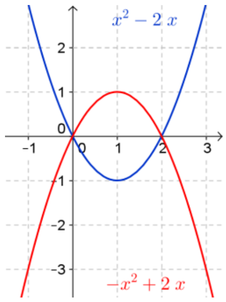
15. Spiegelung an der x-Achse

Kehrt man jedes Vorzeichen von f(x) um, d.h. wird aus f(x) also –f(x), so wird der Graph an der x-Achse gespiegelt.

Bsp.: $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$
→ $-f(x) = \frac{1}{2}x - 1$



$g(x) = x^2 - 2x$
$-g(x) = -x^2 + 2x$

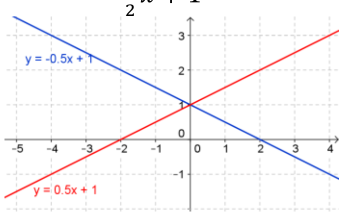


16. Spiegelung an der y-Achse

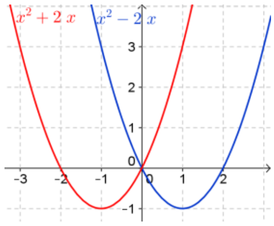
Ersetzt man im Funktionsterm f(x) jedes x durch –x, d.h. aus f(x) wird f(–x), so wird der Graph an der y-Achse gespiegelt.

→ Der Graph einer Funktion f ist genau dann achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn gilt:
$f(-x) = f(x)$

Bsp.: $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$
→ $f(-x) = -\frac{1}{2}(-x) + 1 =$
$= \frac{1}{2}x + 1$



$g(x) = x^2 - 2x$
$g(-x) = (-x)^2 - 2(-x) =$
$= x^2 + 2x$

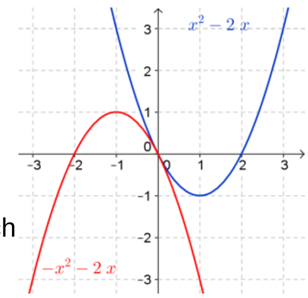


17. Punktspiegelung am Ursprung

Eine Punktspiegelung am Ursprung lässt sich ersetzen durch eine Spiegelung an der x-Achse und eine anschließende Spiegelung an der y-Achse, d.h. aus f(x) wird –f(–x).

→ Der Graph einer Funktion f ist genau dann punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn gilt:
$-f(-x) = f(x)$ bzw.
$f(-x) = -f(x)$

Bsp.:
$g(x) = x^2 - 2x$
$-g(-x) = -[(-x)^2 - 2(-x)] = -x^2 - 2x$

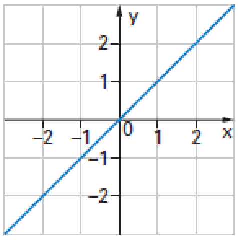


Bsp.: Der Graph der Funktion f mit $f(x) = 4x^3 - 2x$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung, denn:
$\boldsymbol{f(-x)} = 4(-x)^3 - 2(-x) =$
$= -4x^3 + 2x = -(4x^3 - 2x) = \boldsymbol{-f(x)}$

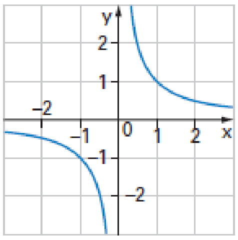
Aufgabe 17:
Untersuchen Sie, ob die Graphen der folgenden Funktionen symmetrisch zur y-Achse oder zum Ursprung sind.
$f(x) = 3x^2 + 4$
$g(x) = x\,(x^2 - 1)$
$h(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$

18a) Grundfunktionen

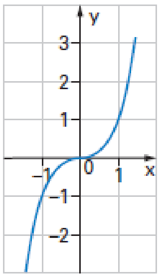
Lineare Funktion $f(x) = x$



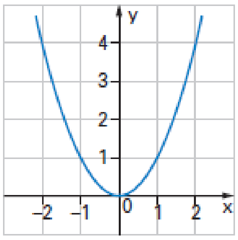
Bruchfunktion $f(x) = \frac{1}{x}$



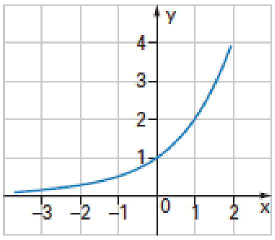
Potenzfunktion $f(x) = x^3$



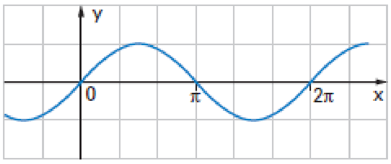
Quadratische Funktion $f(x) = x^2$



Exponentialfunktion $f(x) = 2^x$

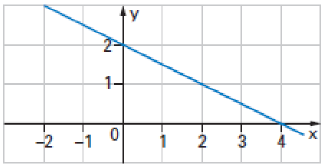


Sinusfunktion $f(x) = \sin x$

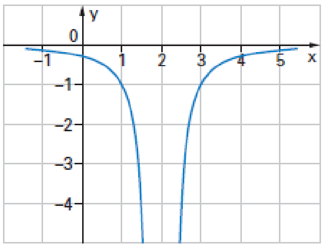


18b) Manipulierte Grundfunktionen

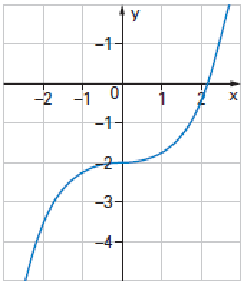
$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$



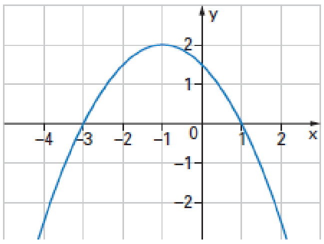
$f(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$



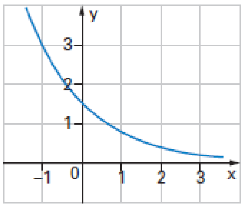
$f(x) = 0{,}2 \cdot x^3 - 2$



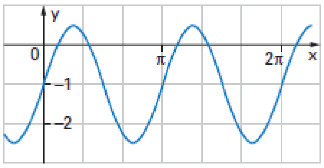
$f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2$



$f(x) = 1{,}5 \cdot 2^{-x} = 1{,}5 \cdot (\frac{1}{2})^x$



$f(x) = 1{,}5 \cdot \sin 2x - 1$



19. Kreis und Kugel

a) Der Kreis

Umfang $U = \pi \cdot d = 2\pi \cdot r$

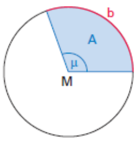
Flächeninhalt $A = \pi r^2$

Kreissektor/-ausschnitt:

Bogenlänge $b = \frac{\mu}{360°} \cdot 2\pi \cdot r$

Flächeninhalt Sektor

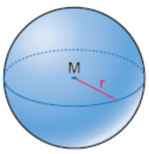
$A = \frac{\mu}{360°} \cdot \pi r^2$



b) Die Kugel

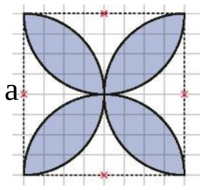
Oberfläche $O = 4\pi \cdot r^2$

Volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$



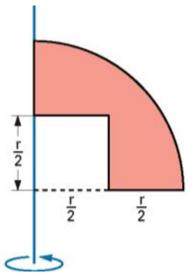
Aufgabe 19:

a) Berechne den Umfang und den Flächeninhalt der farbigen Figur in Abhängigkeit von a.



b) Berechne die Oberfläche einer Kugel mit V = 1000 cm³.

c) Berechne die Oberfläche und den Inhalt des Rotationskörpers.



Quelle einiger Aufgaben und Grafiken: Feuerlein, Distel: *Mathematik 10*. München: bsv. 2008.

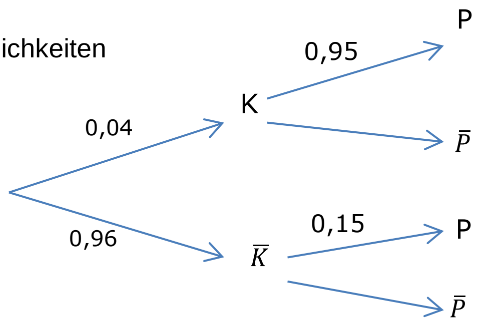
Lösungen zum Grundwissen der 10. Klasse

1) K: krankes Schwein; $\overline{K}$: Gesundes Schwein; P: Positiver Test („Tier soll krank sein“); $\overline{P}$: Negativer Test
Gegeben: P(K) = 0,04; $P_K(P)$ = 0,95 und $P_{\overline{K}}(P)$ = 0,15
Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{\overline{P}}(\overline{K})$

z.B. Vierfeldertafel:

	K	$\overline{K}$	
P	0,95 von 0,04= 0,038	0,15 von 0,96= 0,144	0,182
$\overline{P}$	0,002	0,816	0,818
	0,04	0,96	1

oder anhand eines Baumdiagramms kann man folgende Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Pfadregeln ermitteln:
P(P) = 0,04·0,95 + 0,96·0,15 = 0,182
Somit ist P($\overline{P}$) = 1–P(P) = 0,818.

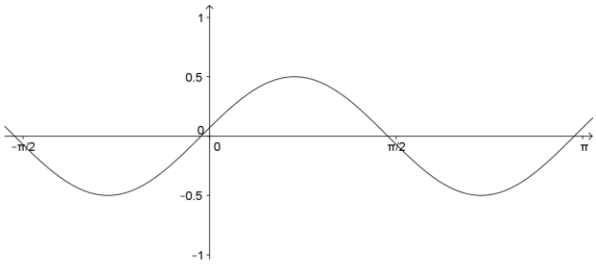


→ $P_{\overline{P}}(\overline{K}) = \frac{P(\overline{P}\ und\ \overline{K})}{P(\overline{P})} = \frac{0{,}96\cdot 0{,}85}{0{,}818} \approx 0{,}99756 \approx 99{,}8\ \%$

2) cos α = –0,342
→ TR liefert $\alpha \approx 110°$ und damit eine Lösung im II. Quadranten.
→ Ein weiterer Winkel mit negativem Kosinuswert liegt im III. Quadranten: $\alpha = 360° - 110° = 250°$.

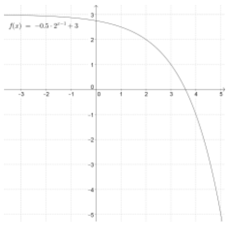
6a) f(x) = $-0{,}5\sin(2x-3) = -0{,}5\sin \mathbf{2}(\boldsymbol{x} - \frac{3}{2})$ (Erst auf die allgemeine Form bringen!)

- um $\frac{3}{2}$ = 1,5 nach rechts verschoben
- in x-Richtung mit dem Faktor 2 gestaucht (= mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ gestreckt);
  Neue Periodenlänge ist $\frac{2\pi}{2} = \pi$
- in y-Richtung mit dem Faktor 0,5 gestaucht (→Amplitude: 0,5) und an der x-Achse gespiegelt



b) grüner Graph: h(x) = $2\sin[2(x+0{,}5)]$
violetter Graph j(x) = $1{,}5\sin[0{,}5(x-0{,}5)]$

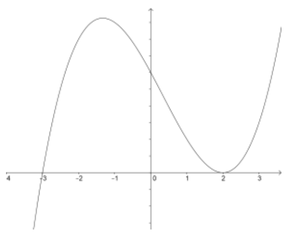
7) Graph der Funktion y = $-\frac{1}{2}\cdot 2^{x-1} + 3$ →



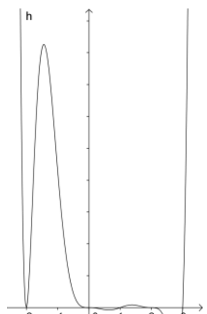
9a) $2{,}5\cdot 3^x = 5\cdot 2^x$
$\frac{3^x}{2^x} = \frac{5}{2{,}5}$ → $(\frac{3}{2})^x = 2$ → $x = \log_{\frac{3}{2}} 2 \approx 1{,}71$
b) $4\cdot 3^{2x-1} = 5\cdot 4^{x+2}$
→ $x \approx 5{,}049$

12) a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \frac{2}{3}$ c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x) = +\infty$
d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} k(x) = \mp\infty$ e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} l(x) = -5$ f) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} m(x) = 0$

14) Ganzrationale Funktionen
a) NS: x_1 = 2 (doppelte NS)
und x_2 = -3 (einfache NS)



b)



c) $f(x) = -x^4 + 4x^3 + x^2 - 16x + 12$

- Teilersatz liefert z.B. $x_1 = 1$
- Polynomdivision: $(-x^4 + 4x^3 + x^2 - 16x + 12) : (x - 1) = \ldots$
- Ermittle weitere NS erst mithilfe des Teilersatzes, dann durch die Lösungsformel: $x_2 = 3$, $x_3 = 2$ und $x_4 = -2$.
- Linearfaktorzerlegung: $f(x) = -(x-1)(x-3)(x-2)(x+2)$

17) Symmetrie: Setze jeweils $-x$ für x ein!

$f(-x) = 3x^2 + 4 = f(x)$ → G_f ist symmetrisch zur y-Achse.

$g(-x) = -x(x^2 - 1) = -g(x)$ → G_g ist symmetrisch zum Ursprung.

$h(-x) = 2\cos\left(-\frac{1}{2}x\right) + 1 = 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 1 = h(x)$ → G_h ist achsensymmetrsich zur y-Achse.

19a) $U = 2\pi a$ und $A = \frac{\pi}{2}a^2 - a^2 = a^2\,(\frac{\pi}{2} - 1)$

b) O = 484 cm²

c) Halbkugel mit zylinderförmiger Aussparung. $O = 3{,}5\pi r^2$ und $V = \frac{13}{24}\pi r^3$